Karlsruher Institut für Technologie

Studienkolleg

Schriftliche Feststellungsprüfung Mathematik

27.01.2020, 8:30 – 11:30 Uhr **Dauer: 180 Minuten**

Vorname: **Nachname:**

Kurs-Nummer:

Aufgabe	1	2	3
maximale Punktzahl	20	19	21
erreichte Punktzahl			

Maximale Gesamtpunktzahl: 60

Erreichte Gesamtpunktzahl:

Note:

Folgendes ist unbedingt zu beachten:

- ***Hilfsmittel:*** ein nicht-programmierbarer Taschenrechner und die Formelsammlung, die Sie vom Studienkolleg erhalten haben
- Schreiben Sie auf dieses Deckblatt Ihren Vornamen, Nachnamen und Ihre Kurs-Nummer.
- Beschriften Sie jedes Blatt, das Sie abgeben, mit Ihrem Namen.
- Schalten Sie Ihr Handy/Smartphone/iPhone, Notebook, Tablet/iPad etc. vor dem Beginn der Prüfung aus und erst nach dem Ende der Prüfung wieder ein.
- Die Lösungswege müssen klar ersichtlich und lesbar sein.
- Lesen Sie zuerst sorgfältig alle Aufgaben und Hinweise durch.

Aufgabe 1 (20 Punkte)

a) Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(5x)-\cos(4x)}{3\sin^2(x)}$

b) Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz.
Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert.

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-\pi)^k\cdot\pi^k}{(2k)\;!}$ 2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(k+1)^{k^2}}{2^k\cdot k^{k^2}}$ 3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{2k+\sqrt{2k^2-1}}{2k^2+k}}$

c) Gegeben: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k\cdot(x+1)^k}{10^k+1}$

1. Bestimmen Sie den **Konvergenzbereich**.
2. Nun ist $x=0$. Wie viele Glieder der Reihe muss man mindestens addieren, um den Grenzwert der Reihe mit einem maximalen Fehler von weniger als 10^{-3} anzugeben? Berechnen Sie diesen **Näherungswert** (Genauigkeit: drei Stellen nach dem Komma).

d) Gegeben: $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{(x-1)^{k-2}}{x^k}$

Bestimmen Sie alle $x\in\mathbb{R}$, für die die Reihe konvergiert und bestimmen Sie für diese $x\in\mathbb{R}$ den Grenzwert $g(x)$ der Reihe.

e) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ 2. $\int\dfrac{5x-7}{(x-1)(x^2-2x+2)}\,dx$ 3. $\int 6x^5\sin(x^3)dx$

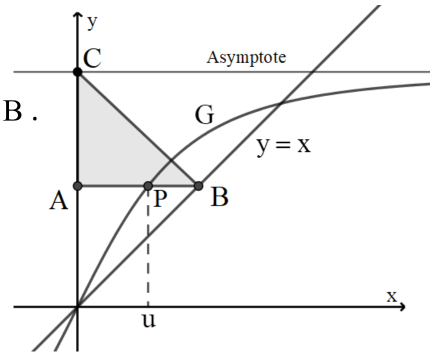
Aufgabe 2 (19 Punkte)

Gegeben: f mit $f(x)=\dfrac{4x}{\sqrt{4+x^2}}$, $D=\mathbb{R}$. Der zugehörige Graph heißt G.

a) 1. Untersuchen Sie G auf **Symmetrie** und **Asymptoten**.
   2. Untersuchen Sie G auf **Extrem-** und **Wendepunkte**.

b) Die Tangente an G im Punkt $(a, f(a))$ schneidet die x-Achse im Punkt $(-2, 0)$. Berechnen Sie a.

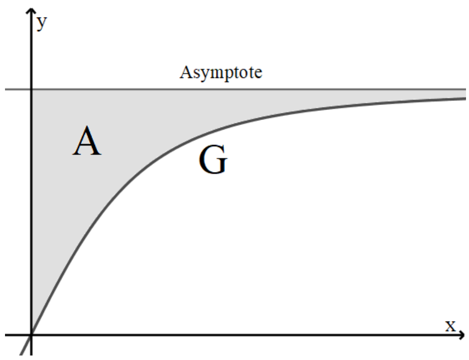
c) Der Punkt $P(u, f(u))$ mit $u>0$ ist ein Punkt von G. Die Parallele zur x-Achse durch P schneidet die y-Achse im Punkt A und die Gerade $y=x$ im Punkt B. Die y-Achse schneidet die in der Abbildung eingezeichnete Asymptote im Punkt C. Bestimmen Sie u so, dass der **Flächeninhalt** des Dreiecks ABC **maximal** ist.
Hinweis: Der Nachweis der hinreichenden Bedingung für eine Maximalstelle ist nicht verlangt.



d) Berechnen Sie mit Hilfe des **Taylorpolynom ersten Grades** von f $(x_0=0)$ einen Näherungswert für $f(0{,}2)$ und führen Sie mit Hilfe des im Unterricht behandelten Restgliedes eine zugehörige „Fehlerabschätzung“ durch.

e) Bestimmen Sie die **Taylorreihe** von f $(x_0=0)$ bis zum Term **7. Grades**.

f) G, die positive y-Achse und die Asymptote begrenzen im ersten Quadranten eine **Fläche**, die nach rechts ins Unendliche reicht. Diese Fläche hat den **Flächeninhalt A**. **Rotiert** diese Fläche um die **x-Achse**, so entsteht ein Körper mit dem Volumen $\mathbf{V_x}$. Rotiert diese Fläche um die **Asymptote**, so entsteht ein Körper mit dem Volumen $\mathbf{V_{Asy}}$.

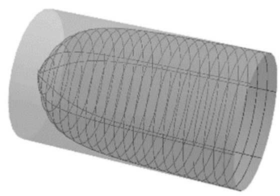


1. Bestimmen Sie den **Flächeninhalt** $\mathbf{A}$.
2. Bestimmen Sie das **Volumen** $\mathbf{V_x}$.
3. Es gilt: $V_x + V_{Asy} = 2\pi \cdot r \cdot A$

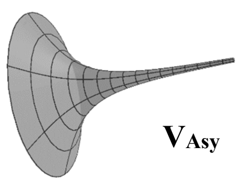
   $\Leftrightarrow$ $\underline{V_{Asy} = 2\pi \cdot r \cdot A - V_x}$.

   Bestimmen Sie r.

   Tipp:
   Berechnen Sie nicht das zu V_{Asy} gehörende Integral. Stellen Sie das Integral von V_{Asy} mit Hilfe der Integrale von A und V_x entsprechend obiger Gleichung dar, dann können Sie den Faktor r vor dem Integral von A ablesen.



$\mathbf{V_x}$



$\mathbf{V_{Asy}}$

Aufgabe 3 (21 Punkte)

3.1 Gegeben:

$$M_a = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2a & -1 & 2 \\ 0 & 1+a & -a \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4a+4 \\ -2-3a \end{pmatrix}, \quad \varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } \varphi_a(\vec{x}) = M_a \cdot \vec{x},$$

a) 1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS $M_a \cdot \vec{x} = \vec{b}$ in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$.

2. Geben Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}\,\varphi_a$ und $\mathrm{Bild}\,\varphi_a$ in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ an.

Hinweis: Führen Sie jeweils eine Fallunterscheidung durch.

b) Gibt es ein $a \in \mathbb{R}$ so, dass φ_a eine Parallelprojektion auf eine Ebene ist? **Begründen Sie Ihre Antwort**.

c) Nun ist $\underline{a = 0}$.

1. Berechnen Sie alle Eigenwerte EW von φ_0.

2. Bestimmen Sie für einen (von Ihnen frei wählbaren) EW von φ_0 den zugehörigen Eigenraum ER.

3.2 Gegeben:

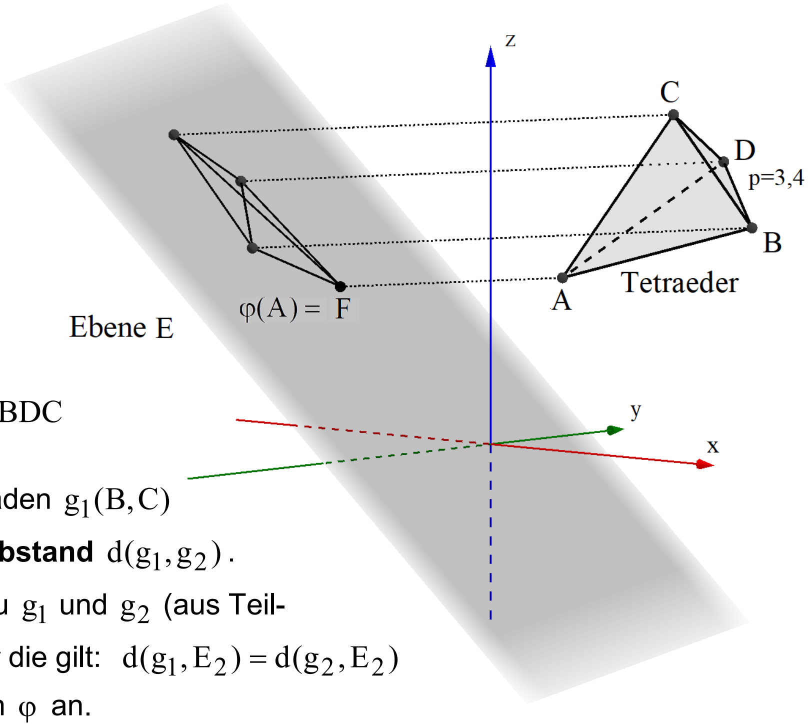
Tetraeder ABCD: $A(0,2,3)$, $B(3,4,4)$, $C(1,4,6)$, $D(1,2+p,5)$

Ebene E(ABC): $-x+2y-z=1$

Ebene E: $2x+y+2z=0$

Punkt F von E: $F(-2,-2,3) \subseteq E$

Parallelprojektion φ auf Ebene E mit $\varphi(A) = F$



a) Berechnen Sie **Schnittgerade** und **Schnittwinkel** von E(ABC) und E.

b) Berechnen Sie den **Flächeninhalt** des **Dreiecks** ABC.

c) Bestimmen Sie p so, dass das **Dreieck** BDC **parallel** zur Ebene E ist.

d) 1. Gegeben sind die windschiefen Geraden $g_1(B,C)$ und $g_2(A,F)$. Berechnen Sie den **Abstand** $d(g_1,g_2)$.

2. Bestimmen Sie eine Gleichung der zu g_1 und g_2 (aus Teilaufgabe 1.) parallelen Ebene E_2, für die gilt: $d(g_1,E_2) = d(g_2,E_2)$

e) 1. Geben Sie einen Richtungsvektor von φ an.

2. Bestimmen Sie die zu φ gehörende Abbildungsmatrix (bezüglich der Standardbasis).

f) $\vec{n}_E$ sei ein Normalenvektor der Ebene E. Definieren Sie eine lineare Abbildung φ_2 - in Form ihrer Abbildungsmatrix - mit $\mathrm{Kern}\varphi_2 = E$ und $\mathrm{Bild}\varphi_2 = L[\vec{n}_E]$.