KIT (Uni Karlsruhe) | **STUDIENKOLLEG** Berufstätigenprüfung

Mathematik – Klausur

Beispiel

Name, Vorname, Geb.datum ………………………………………………………………..

Hilfsmittel : Taschenrechner (nicht progammierbar, keine Graphik, keine Lösung von Gleichungen)

Bewertung : Note = 6 – (Punkte / 10) ; insgesamt 65 Punkte !

Dauer : 180 Minuten

Aufgabe 1 (5 P.)

Zeigen Sie:

a) für alle $n \geq 5$: $\displaystyle\sum_{k=3}^{n-2} \frac{k^2}{2^{k+2}} = \frac{9}{8} - \frac{n^2+2}{2^n}$

b) für alle $n \in \mathrm{IN}$: $\displaystyle 2 \cdot \sqrt{n+1} - 2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

Aufgabe 2 (6 P.)

Gegeben ist die (reelle) Funktion g mit $g(x) = \dfrac{2x}{|x|+1}$.

a) 1. Bestimmen Sie für den Graphen von g alle Asymptoten.
   2. Zeichnen Sie *sorgfältig* den Graphen von g für $|x| \leq 7$.
   3. Skizzieren Sie den Graphen der Umkehrfunktion g^*
      (im gleichen Diagr. wie der Graph von g , andere Farbe !) .
   4. Bestimmen Sie alle Schnittpunkte der Graphen von g und g^* .

b) 1. Für welche $x \in \mathrm{IR}$ gilt $g(x) \leq x$? 2. Für welche $x \in \mathrm{IR}$ gilt $|g(x)| \leq \frac{3}{2}$?

Aufgabe 3 (7 P.)

a) Gegeben ist die Zahlenfolge (a_n) mit $a_n = \dfrac{n+7}{n^2+3}$, $n \in \mathrm{IN}$.

   1. Berechnen Sie die ersten 7 Glieder der Folge.
   2. Untersuchen Sie (a_n) auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz.
   3. Bestimmen Sie eine Zahl K so, daß für alle $n > K$ gilt : $|a_n| < 0{,}07$ ("abschätzen") .

b) Untersuchen Sie folgende Zahlenfolgen auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz / Divergenz [auch Grenzwert, Häufungswert(e), ...] .

   1. $b_n = \left(\dfrac{-e}{\pi}\right)^{3n+4}$ 2. $d_n = \dfrac{4n}{3 + 2 \cdot n \cdot \cos(n \cdot \pi)}$

Aufgabe 4 (10 P.)

a) Berechnen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen (vollständig gekürzt / vereinfacht !) :

1. $\dfrac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}$ 2. $x \cdot \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 3. $\arctan\left(\ln\left(\sqrt{x+1}\right)\right)$

b) Bestimmen Sie folgende Integrale exakt :

1. $\displaystyle\int_1^4 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^3-1}}$ [Substitution] 2. $\displaystyle\int x^2 \cdot e^{-x}\,dx$ 3. $\displaystyle\int x^3 \cdot \ln x\,dx$

c) Berechnen Sie 1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1-\sin(2x)}{x^2-1+\cos x}$ 2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\arctan x)^{\tan x}$

Aufgabe 5 (7 P.)

Gegeben ist die (reelle) Funktion f mit $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+4}$. Der Graph von f sei G .

a) 1. Bestimmen Sie die Koordinaten des Hochpunktes von G .
 2. Bestimmen Sie die Koordinaten aller Wendepunkte von G .
 3. Zeichnen Sie sorgfältig den Graphen von f für $|x| < 7$.
 4. Best. Sie alle Schnittpunkte samt Schnittwinkel der Geraden h : $y = x/2$ mit G.

b) Die positive x-Achse, die Gerade $x = 2$ und G begrenzen (im ersten Quadranten) die (dreiecksähnliche) Fläche A . Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche A .

Aufgabe 6 (8 P.)

Gegeben ist die (reelle) Funktion f mit $f(x)=x^2 \cdot e^{-x}$. Der Graph von f sei G .

a) 1. Berechnen Sie $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$.
 2. Bestimmen Sie die Koordinaten <u>aller</u> Extrempunkte von G .
 3. Bestimmen Sie die Koordinaten <u>aller</u> Wendepunkte von G .
 4. Zeichnen Sie sorgfältig den Graphen von f für $|x| < 5$.

b) Die positive x–Achse und G begrenzen (im ersten Quadranten) die Fläche A, die nach rechts ins Unendliche reicht . Bestimmen Sie ihren Inhalt !

Aufgabe 7 (7 P.)

Gegeben ist die (reelle) Funktion f mit $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+x^2+\dfrac{1}{3}$. Der Graph von f sei G .

a) 1. Bestimmen Sie die Koordinaten <u>aller</u> Extrempunkte von G . (Art und Nachweis !)
 2. Bestimmen Sie die Koordinaten <u>des</u> Wendepunktes von G .
 3. Zeichnen Sie sorgfältig den Graphen von f für $|x| < 5$.
 4. n sei die Normale in P(-1|1) an G. Finde <u>alle</u> Schnittp. von n und G samt Winkel .

b) Die Koordinatenachsen, die Gerade $x=1$ und G begrenzen (im ersten Quadranten) die Fläche A. Bestimmen Sie ihren Inhalt !

Aufgabe 8 (7 P.)

a) Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Gleichungssystems für $r \neq 0$:

$$\begin{array}{r|lll} 3x & -10y & +z & = & 5 \\ 2x & & +2z & = & r \\ x & +ry & +z & = & 2 \end{array}$$

b) Welche Lösung hat das obige Gleichungssystem für $r = 0$?

c) Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 \\ b & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b \neq 1$ Bestimmen Sie M^2 und M^{-1} .

Aufgabe 9 (8 P.)

Im Euklidschen Raum sind die Ebenen $E_1 : \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 0$ und $E_2 : \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

sowie die Geraden $g_q : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -q \end{pmatrix}$ und $k : \vec{x} = u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben .

a) 1. Bestimmen Sie (für <u>allgemeines</u> q) den Schnittpunkt S_q von g_q und E_1 .
   2. Zeigen Sie, daß S_q auf k liegt .
   3. Für welchen Wert von q ist g_q parallel zu E_1 ?

b) 1. Zeigen Sie, daß alle Geraden g_q in E_2 liegen .
   2. Welchen Winkel bilden E_1 und E_2 ?
   3. Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden h von E_1 und E_2 .
   4. Welche gegenseitige Lage haben h und k ?

c) 1. Welchen Abstand hat g_o von E_1 ?
   2. Welchen Abstand haben g_o und k ?

Hinweis : bei wolfram alpha (Internet) finden Sie gute Unterstützung !