Universität Karlsruhe (T.H.)

STUDIENKOLLEG

Schriftliche Feststellungsprüfung (Beispiel)

Fach:	**Mathematik**
Dauer:	3 Stunden (180 Minuten)
Hilfsmittel:	Taschenrechner *ohne* Programmteil

Aufgabe 1

Im Anschauungsraum sind durch cartesische Koordinaten gegeben: die Punkte A(1|2|3), B(3|2|1), C(4|6|2), die (sich schneidenden) Geraden

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und die Ebene E: $(k-2)x + 2y - kz = 2(1-k), \quad k \in \mathbb{R}.$

Die Ebene durch ABC heißt E_1 und die Ebene durch g und h heißt E_2.

a)

1. Berechnen Sie Schnittpunkte und Schnittwinkel von g und h.
2. Zeigen Sie, daß die Geraden BC und h windschief sind.
3. Berechnen Sie den (kürzesten) Abstand von h und BC.

b)

1. Welche Koordinatengleichung hat E_1?
2. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.
3. Bestimmen Sie $D \in h$ so, daß das Tetraeder ABCD das Volumen 2 hat. Wieviele Lösungen gibt es für D?

c)

1. Welche Gleichung hat die Schnittgerade $s = E_1 \cap E_2$?
2. Berechnen Sie $k \in \mathbb{R}$ so, daß $E_1 \cap E_2 \cap E = s$ ist.
3. Für welche $k \in \mathbb{R}$ schneiden sich E_1, E_2, E in einem Punkt? Welche Koordinaten hat dieser Punkt?
4. Gibt es ein $k \in \mathbb{R}$ so, daß $E_1 \cap E_2 \cap E$ die leere Menge ist ?

Aufgabe 2

Gegeben ist die reelle Funktion $f_a(x) = \dfrac{x^2 + a - 1}{x+1} \quad (a \in \mathbb{R}_0^+)$.

a)

1. Für welche a hat der Graph von f_a Asymptoten, Schnittpunkte mit der x-Achse, Hoch- und Tiefpunkte?
   Auf welcher Ortskurve liegen Hoch- und Tiefpunkte, wenn a variiert?
2. Zeichnen Sie die Graphen von f_0 und f_1 im Intervall [-4;4] (LE 1cm).
3. Zeigen Sie, daß die Funktion f_0 für $x \to -1$ konvergiert. Berechnen Sie den Grenzwert.

b)

Die Graphen von f_a und f_0 sowie die Gerade g_1: x=0 und g_2: x=e–1 begrenzen die Fläche A. Für welchen Wert a hat A den Inhalt 1 FE?.

c)

Auf der Menge { f_a } wird eine Verknüpfung definiert durch:

$$(f_a \circ f_b)(x) = \frac{1}{2}(f_a(x) + f_b(x)) \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}; a,b \in \mathbb{R}_0^+).$$

1. Zeigen Sie, daß $(\{f_a\},\circ)$ abgeschlossen und kommutativ ist.
2. Beweisen Sie: $f_a \circ f_a \circ f_a \circ \cdots f_a = f_a$.
3. Ist $(\{f_a\},\circ)$ eine Gruppe?

Aufgabe 3

Gegeben ist die reelle Funktion f_a mit $f_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} \cdot \sin ax, & x < 0 \\ e^{-x} \cdot \sin x, & x \geq 0 \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}$

Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet.

a)

1. Wie oft ist f_a auf IR differenzierbar?
2. Bestimmen Sie für G_a alle x-Achsenschnittpunkte, Hoch-, Tief- und Wendepunkte sowie Asymptoten.
3. Für welches $a \in \mathbb{R}^+$ liegen die x-Achsenschnittpunkte symmetrisch zum Ursprung.
4. Zeichnen Sie G_1 für $|x| \leq 3{,}5$ (LE 2cm).

b)

Die Schnittpunkte von G_a mit der positiven x-Achse werden mit N_1, N_2, ..., N_n, ...

bezeichnet. G_a und die Strecken $\overline{N_{n-1}N_n}$ begrenzen jeweils eine Fläche, deren Inhalt die positive Maßzahl A_n habe.

1. Zeigen Sie: $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \quad A_n = \dfrac{1+e^{\pi}}{2 \cdot e^{n\pi}}$
2. Zeigen Sie, daß die Folge (A_n) geometrisch ist.
3. Berechnen Sie $A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$. Bestimmen Sie das Verhältnis $A:A_1$.